Φροντιστήριο 1 - Λύσεις σε επιλεγμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Έστω Π(n), $n \geq 7$, η πρόταση

$$\Pi(n) \equiv 3^n < n!$$

Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $n \geq 7$ με τη μέθοδο της επαγωγής:

Βάση της επαγωγής *n=7*

Έχουμε $3^7 = 2187 < 5040 = 7!$, και η Π(7) έπεται.

Υπόθεση της επαγωγής Η Π(n) ισχύει για n = k, δηλαδή $3^k < k!$.

Βήμα της επαγωγής Θα αποδείξουμε ότι Π(k+1).

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3 \cdot 3^k \\ &< 3 \cdot k! && \text{Υπόθεση της επαγωγής} \\ &< (k+1) \cdot k! && k > 7 \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Πιο κάτω παρουσιάζεται η σωστή σειρά των συναρτήσεων ξεκινώντας από τη μικρότερη τάξη προς τη μεγαλύτερη. Συναρτήσεις που ανήκουν στην ίδια τάξη βρίσκονται γραμμένες στην ίδια γραμμή.

$$6$$
$$\lg n$$
$$\sqrt{n}$$
$$n$$
$$n \lg n$$
$$n^2, \quad n^2 + \log n$$
$$n^3, \quad n^2 + 5n^3$$

Ακολουθεί αιτιολόγηση κάποιων σχέσεων:

(i) *Σύγκριση $n^2 + 5n^3$ και n^3*

$n^2 + 5n^3 \in \Omega(n^3)$??

Έστω ότι $c_1 = 1$ και $n_0 = 0$,

$$n^2 + 5n^3 \geq 1 \,.\, n^3 \text{ για κάθε } n \geq 0 \; (n^2 \geq 0 \text{ και } 5n^3 \geq n^3 \text{ για κάθε } n \geq 0)$$

$n^2 + 5n^3 \in O(n^3)$??

Έστω ότι $c_2 = 6$ και $n_0 = 0$,

$$n^2 + 5n^3 \leq 6 \cdot n^3, \text{ για κάθε } n \geq 0 \; (n^2 \leq n^3 \text{ και } 5n^3 \leq 5n^3 \text{ για κάθε } n \geq 0)$$

(ii) *Σύγκριση lg n και n lg n.*
Έστω ότι $c_1=1$ και $n_0 = 1$,

$$\lg n \le n \lg n, \quad \text{για κάθε } n \ge 1 \ \ (\lg n \le \lg n \text{ και } 1 \le n, \text{ για κάθε } n \ge 1)$$

Από την άλλη δεν ισχύει ότι $n \in \Omega(n \lg n)$.
Ας υποθέσουμε ότι ότι $\lg n \in \Omega(n \lg n)$.

Τότε υπάρχουν c και κάθε n_0 τέτοια ώστε
$$\lg n \ge c \cdot n \lg n \text{ για κάθε } n \ge n_0.$$
Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχουν c και κάθε n_0 τέτοια ώστε
$$1 \ge c \cdot n \text{ για κάθε } n \ge n_0$$
$$\Leftrightarrow \quad c \le 1/n \text{ για κάθε } n \ge n_0$$

Καθώς το n τείνει στο άπειρο ο λόγος 1/n τείνει στο 0. Επομένως δεν είναι δυνατόν να υπάρχει θετική σταθερά c που να ικανοποιεί την πιο πάνω σχέση. Συμπέρασμα:
$$n \notin \Omega(n \lg n).$$

(iii) *Σύγκριση lg n και* $\sqrt{n}$
Ας υποθέσουμε ότι $\lg n \notin O(\sqrt{n})$.

Τότε για κάθε c και κάθε n_0 υπάρχει $k > n_0$ τέτοιο ώστε $\lg k > c\sqrt{k}$ και κατά συνέπεια $\lg^2 k > (c\sqrt{k})^2 = c^2 \cdot k$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\lg^2 n \notin O(n)$ που έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση «ασυμπτωτικά μικρότερο» που έχουμε δει στη διαφάνεια 3.23. Επομένως $\lg n \in O(\sqrt{n})$ και το ζητούμενο έπεται .

Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι $\lg n \notin \Omega(\sqrt{n})$.

<u>Άσκηση 3</u>

(i) $T_1(n) \in \Omega(f(n))$ και $T_2(n) \in \Omega(g(n))$

$\Leftrightarrow$ (από τον ορισμό της τάξης Ω)
υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, n_1 και n_2, τέτοιες ώστε
$$T_1(n) \ge c_1 \cdot f(n) \text{ για κάθε } n \ge n_1 \qquad (1)$$
και
$$T_2(n) \ge c_2 \cdot g(n) \text{ για κάθε } n \ge n_2 \qquad (2)$$

$\Leftrightarrow$ (από (1))
$$T_1(n) \cdot T_2(n) \ge c_1 \cdot f(n) \cdot T_2(n) \text{ για κάθε } n \ge n_1$$

$\Leftrightarrow$ (από (2))
$$T_1(n) \cdot T_2(n) \ge c_1 \cdot f(n) \cdot c_2 \cdot g(n) \text{ για κάθε } n \ge n_1, n_2$$

$\Leftrightarrow$
υπάρχουν σταθερές c και n_0, τέτοιες ώστε
$$T_1(n) \cdot T_2(n) \ge c \cdot f(n) \cdot g(n) \text{ για κάθε } n \ge n_0$$
συγκεκριμένα οι $c = c_1 \cdot c_2$ και $n = \max(n_1, n_2)$

$\Leftrightarrow$ (από τον ορισμό της τάξης Ω)
$$T_1(n) \cdot T_2(n) \in \Omega(f(n) \cdot g(n)).$$

(ii) Έστω c= $|a_0| + |a_1| + |a_2| + ... + |a_k|$ και $n_0 = 1$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k &\leq |a_0| + |a_1|n + |a_2|n^2 + \ldots + |a_k|n^k \\ &\leq |a_0|n^k + |a_1|n^k + |a_2|n^k + \ldots + |a_k|n^k \\ &\leq (|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|)n^k \\ &\leq c \cdot n^k \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται.

(iii) Υποθέτουμε ότι η πρόταση αυτή ισχύει, δηλαδή αν f(n) θετική συνάρτηση του n, τότε $f(n) \in O((f(n))^2)$

Έστω f(n) = 1/n, n>0 η θετική συνάρτηση του n

$\Rightarrow (f(n))^2 = 1/n^2$.

Αφού η πρόταση ισχύει

$\Rightarrow 1/n \in O(1/n^2)$

Εξετάζοντας το ρυθμό αύξησης, δηλαδή το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(f(n))^2}$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty, \text{ δηλαδή } 1/n \in \Omega(1/n^2)$$

ΑΝΤΙΦΑΣΗ: Η πιο πάνω πρόταση έρχεται σε αντίφαση με την αρχική υπόθεση, άρα η αρχική υπόθεση καταρρίπτεται και η πρόταση δεν ισχύει.

(iv) Για να αποδείξουμε ότι $\lg n^3 \in \Theta(\log_{16} n^5)$ πρέπει να δείξουμε ότι $\lg n^3 \in \Omega(\log_{16} n^5)$ και $\lg n^3 \in O(\log_{16} n^5)$

(α) Θα δείξουμε ότι $\lg n^3 \in \Omega(\log_{16} n^5)$, δηλαδή ότι υπάρχουν σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε

$$\lg n^3 \geq c \cdot \log_{16} n^5 \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lg n^3 = 3\lg n$$

$$\log_{16} n^5 = 5\log_{16} n = 5\frac{\log_2 n}{\log_2 16} = 5\frac{\log_2 n}{\log_2 2^4} = 5\frac{\log_2 n}{4\log_2 2} = \frac{5}{4}\lg n$$

Προφανώς

$$3\lg n \geq \frac{5}{4}\lg n \qquad \text{για κάθε } n_0 \geq 1$$

(β) Θα δείξουμε ότι $\lg n^3 \in O(\log_{16} n^5)$, δηλαδή ότι υπάρχουν σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε

$$\lg n^3 \leq c \cdot \log_{16} n^5 \qquad \text{για κάθε n} \geq \text{n0}$$

Βάση των παρατηρήσεων που έχουμε κάνει στο (α) η πιο πάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με

$$3\lg n \leq c.\frac{5}{4}\lg n \qquad \text{για κάθε n} \geq \text{n0}$$

Έστω c = 4

$$3\lg n \leq 5\lg n \qquad \text{για κάθε } n_0 \geq 1$$

Από τα (α) και (β) $\lg n^3 \in \Theta(\log_{16} n^5)$