Σειρά Προβλημάτων 5 – Λύσεις

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες είναι διαγνώσιμες.

(α) ({ ⟨G⟩ | η G είναι μια ασυμφραστική γραμματική που δεν παράγει καμιά λέξη με μήκος μικρότερο του 2 }

(β) { ⟨M,w⟩ | η M είναι μια TM η οποία θα επιχειρήσει να κινήσει την κεφαλή της προς τα αριστερά σε κάποιο σημείο του υπολογισμού της στη λέξη w }

Λύση

(α) S = ‘ Για είσοδο ⟨*G*⟩ , όπου *G* μια CFG:

1. Μετατρέπουμε τη *G* σε μια ισοδύναμη γραμματική σε κανονική μορφή Chomsky.
2. Συντάσσουμε όλες τις παραγωγές μέχρι 1 βήμα.
3. Αν κάποια από τις παραγωγές τερματίσει *απορρίπτουμε*, αλλιώς *αποδεχόμαστε*.’

Ορθότητα: Γνωρίζουμε ότι αν η *G* είναι σε κανονική μορφή Chomsky τότε οποιαδήποτε παραγωγή κάποιας λέξης *w* αποτελείται από $2n$-1 βήματα (όπου n=|w|). Επομένως αν τρέξουμε όλες τις ακολουθίες με 0 ή 1 βήματα θα έχουμε διατρέξει όλες τις υποψήφιες παραγωγές λέξεων με μήκος μικρότερο του 2. Αν έστω και μια από τις εκτελέσεις οδηγήσει σε παραγωγή λέξης τότε θα πρέπει να απορρίψουμε. Αν καμιά από τις εκτελέσεις δεν οδηγήσει σε παραγωγή λέξης, συμπεραίνουμε ότι είναι αδύνατη η παραγωγή λέξης με μήκος <2 επομένως αποδεχόμαστε.

(β) Παρατηρούμε ότι μια TM θα μετακινήσει την κεφαλή της αριστερά κατά την επεξεργασία κάποιας λέξης w αν και μόνο αν το κάνει αυτό μέσα στο πρώτα |w| + |Q| + 1 βήματα, όπου |Q| ο αριθμός των καταστάσεων της TM. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν η μηχανή κινεί την κεφαλή της μόνο δεξιά, τότε μετά από τα πρώτα |w| βήματα θα έχει ολοκληρώσει την ανάγνωση της λέξης και θα βρίσκεται στο πρώτο σύμβολο διαστήματος (πρώτη κενή θέση μετά από τη w). Στη συνέχεια αν μέσα στο επόμενα |Q| + 1 βήματα δεν μετακινήσει την κεφαλή της προς τα δεξιά, σημαίνει ότι έχει εισέλθει σε ένα ατέρμονο βρόχο από τον οποίο απλά αλλάζει καταστάσεις καθώς προσπερνά κενές θέσεις της ταινίας και μετακινεί την κεφαλή της μηχανής προς τα δεξιά στην επόμενη κενή θέση. Αυτός ο βρόχος περιλαμβάνει μέχρι και όλες τις καταστάσεις της μηχανής.

Επομένως ο ζητούμενος αλγόριθμος διάγνωσης του προβλήματος έχει ως εξής:

S = ‘ Για είσοδο ⟨*M*,*w*⟩ , όπου *M* μια TM και *w* μια λέξης:

1. Τρέξε την M για |w| + |Q| + 1 βήματα, όπου |Q| ο αριθμός των καταστάσεων της M.
2. Αν σε κάποιο από τα βήματα η M μετακινήσει την κεφαλή της αριστερά τότε αποδέξου, διαφορετικά απόρριψε.’

Άσκηση 2

Για κάθε μια από τις πιο κάτω προτάσεις να αποφασίσετε αν είναι ή όχι αληθής αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Η γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ$_{TM}$ (διαφάνεια 9-23) είναι αναγνωρίσιμη.

(β) Η γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ$_{TM}$ (διαφάνεια 9-23) είναι συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη.

(γ) Για κάθε γλώσσα Λ, αν η Λ αποτελεί υποσύνολο της γλώσσας A_{TM} ($Λ \subseteq A_{TM}$) τότε είναι μη διαγνώσιμη.

(δ) Για κάθε γλώσσα Λ, αν η Λ αποτελεί υπερσύνολο της γλώσσας A_{TM} ($Λ \supseteq A_{TM}$) τότε είναι μη διαγνώσιμη.

Λύση

(α) Η πρόταση είναι λανθασμένη. Για να διαπιστώσουμε ότι η γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη θα πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι μια δοθείσα μηχανή Turing δεν αποδέχεται καμιά λέξη. Αυτό συνεπάγεται ενδεχομένως να τρέξουμε τη μηχανή σε όλες τις λέξεις και να επιδείξουμε ότι η μηχανή δεν αποδέχεται καμιά από αυτές.
Πιο τυπικά έχουμε τα εξής: Παρατηρούμε ότι αν η γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη και αφού μπορούμε να δείξουμε ότι είναι και συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη (δες σκέλος (β) πιο κάτω) αυτό συνεπάγεται ότι η γλώσσα είναι διαγνώσιμη (δες Θεώρημα Διαφάνειας 8-52). Αφού όμως έχουμε αποδείξει ότι η γλώσσα είναι μη διαγνώσιμη (διαφάνεια 9-23) αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση. Επομένως η γλώσσα $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$ είναι μη αναγνωρίσιμη.

(β) Η πρόταση είναι αληθής. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μηχανή Turing R η οποία αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της γλώσσας $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$. Έστω όλες οι λέξεις στο Σ*. Η μηχανή που θα αναγνωρίζει τη γλώσσα θα πρέπει, με δεδομένο εισόδου μια TM έστω M, να είναι σε θέση να αναγνωρίσει αν υπάρχει έστω και μια λέξη στο Σ* η οποία γίνεται αποδεκτή από την M. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $L(M) \neq \emptyset$ και επομένως η R θα πρέπει να αποδεχθεί. Προφανώς, η R δεν μπορεί να εκτελέσει την M σε όλες τις λέξεις στο Σ* μέχρι η M να αποδεχθεί. Αυτό γιατί μπορεί σε οποιαδήποτε λέξη η M να εγκλωβιστεί. Επομένως, για να αποφύγουμε τον εγκλωβισμό, η R μπορεί να οριστεί ως εξής:

R:= "Με είσοδο <M> όπου M μια TM

1. Για i = 1, 2, 3,…
2. Τρέξε την M για i βήματα σε όλες τις λέξεις με μήκος μέχρι i.
3. Μόλις κάποιος υπολογισμός αποδεχθεί, αποδέξου.

Ορθότητα: Πρέπει να δείξουμε ότι αν η M αποδέχεται έστω και μία λέξη η R θα αποδεχθεί. Έστω ότι η M αποδέχεται κάποια λέξη w με μήκος n μετά από μια εκτέλεση m βημάτων. Έστω k = max(m,n), τότε κατά την k-οστή εκτέλεση του βρόχου της R, η M θα τρέξει τη λέξη w για n βήματα. Επομένως, η R θα μπορέσει να αναγνωρίσει ότι η M αποδέχεται την w και θα αποδεχθεί όπως είναι και το ζητούμενο.

(γ) Η πρόταση είναι ψευδής. Για παράδειγμα η γλώσσα $\emptyset$ είναι υποσύνολο της A_{TM} και είναι διαγνώσιμη γλώσσα.

(δ) Η πρόταση είναι ψευδής. Για παράδειγμα η γλώσσα που περιέχει όλα τα ζευγάρια <M,w> όπου M μια TM και w μια λέξη είναι υπερσύνολο της A_{TM} και είναι διαγνώσιμη γλώσσα.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι διαγνώσιμες.

(α) {⟨M⟩ | η M είναι μια TM με δύο ταινίες η οποία κατά τη διάρκεια του υπολογισμού της σε κάποια λέξη θα επιχειρήσει να γράψει το σύμβολο του διαστήματος πάνω σε κάποιο άλλο σύμβολο στη δεύτερη ταινία της }

(β) { ⟨M ⟩ | η M είναι μια TM η οποία με είσοδο την κενή λέξη κάποια στιγμή θα επιχειρήσει να γράψει στην ταινία της το στοιχείο 0 }

Λύση

(α) Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα

A = {⟨M⟩ | η M είναι μια TM με δύο ταινίες έτσι ώστε κατά τη διάρκεια του υπολογισμού της σε κάποια λέξη θα επιχειρήσει να γράψει το σύμβολο του διαστήματος πάνω σε κάποιο άλλο σύμβολο στη δεύτερη ταινία της }

είναι μη διαγνώσιμη.

Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε σε αυτή μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM}. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα A είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM}. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η A είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

S:="Με είσοδο ⟨M,w⟩.

1. Φτιάξε μια παραλλαγή της M, έστω M' η οποία με είσοδο x:
   (α) Γράφει κάποιο σύμβολο διάφορο του συμβόλου διαστήματος στην πρώτη θέση της δεύτερης ταινίας της και επαναφέρει το βέλος στην πρώτη θέση.
   (β) Αν x = w η M' τρέχει το M με είσοδο w και εργάζεται μόνο στην πρώτη ταινία της, παραμένοντας στάσιμη στη δεύτερη ταινία.
   (γ) Αν η M αποδεχθεί το w τότε η M' γράφει στη δεύτερη ταινία της το σύμβολο του διαστήματος και τερματίζει.
   (δ) Αν x ≠ w τότε η M' τερματίζει.
2. Τρέξε την R με είσοδο ⟨M'⟩.
3. Αν η R αποδεχθεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ."

Προφανώς, κάθε φορά που η μηχανή M' γράφει στη δεύτερη ταινία της το σύμβολο του διαστήματος, η μηχανή M έχει φτάσει στην κατάσταση αποδοχής αφού έτρεξε στη λέξη w. Επομένως, η R θα αποδεχθεί την M' αν και μόνο αν η M αποδέχεται το w.

Συνεπώς η S αποτελεί διαγνώστη για τη γλώσσα A_{TM} γεγονός που μας οδηγεί σε αντίφαση. Συμπεραίνουμε ότι η γλώσσα A είναι μη διαγνώσιμη.

(β) Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα
B = { ⟨M ⟩ | η M είναι μια TM η οποία με είσοδο την κενή λέξη κάποια στιγμή θα επιχειρήσει να γράψει στην ταινία της το στοιχείο 0 }

είναι μη διαγνώσιμη.

Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε σε αυτή μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM}. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα B είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM}. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η B είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

S := "Με είσοδο ⟨M,w⟩

1. Φτιάξε μια παραλλαγή της M, έστω M', όπου αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση του 0 με $\underline{0}$. Επίσης, δημιουργούμε μια καινούρια κατάσταση αποδοχής η οποία είναι προσβάσιμη από την παλιά κατάσταση αποδοχής μέσω μιας μετάβαση η οποία εγγράφει στην ταινία την τιμή 0.
2. Φτιάξε τη TM M'' η οποία με είσοδο x:

- Τρέχει την M' με είσοδο τη λέξη w' που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση του 0 στην λέξη w με 0̲.

3. Τρέξε την R με δεδομένο εισόδου την M''.
4. Αν η R αποδεχθεί τότε αποδέξου.
5. Αν η R απορρίψει τότε απόρριψε.

Προφανώς η μηχανή M'' εγγράφει την τιμή 0 στην ταινία της σε οποιαδήποτε λέξη x αν και μόνο αν η μηχανή M' εγγράφει την τιμή 0 στην ταινία της στη λέξη w', και αυτό το τελευταίο θα συμβεί, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται την λέξη w. Επομένως, κατασκευάσαμε διαγνώστη για τη γλώσσα A_{TM} γεγονός που μας οδηγεί σε αντίφαση στην υπόθεσή μας ότι η γλώσσα B είναι διαγνώσιμη.

<u>Άσκηση 4</u>

Μια εταιρεία παραδόσεων διαθέτει δύο φορτηγά και έχει να παραδώσει ένα σύνολο από πακέτα σε ένα αριθμό από διευθύνσεις. Οι παραδόσεις πρέπει να συμπληρωθούν μέσα σε μια μέρα και ο υπεύθυνος παραδόσεων καλείται να δημιουργήσει ένα πλάνο για κάθε οδηγό. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα έχει ως εξής:

Δεδομένο εισόδου: Ένα σύνολο V από τοποθεσίες, ένας πίνακας d[v,u] για κάθε ζεύγος τοποθεσιών u,v $\in$ V ο οποίος αποθηκεύει την απόσταση (ακέραια τιμή) ανάμεσα στις αντίστοιχες τοποθεσίες, ένα σημείο εκκίνησης start και ένας ακέραιος K.

Ζητούμενο: Υπάρχουν δύο κύκλοι που ξεκινούν από την αρχική τοποθεσία start, έτσι ώστε κάθε τοποθεσία v $\in$ V να ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τους δύο κύκλους και κάθε κύκλος να έχει μήκος το πολύ K;

(α) Να διατυπώσετε αυτό το πρόβλημα υπό τη μορφή γλώσσας και να δείξετε ότι ανήκει στην κλάση NP.

(β) Να δείξετε ότι η γλώσσα που ορίσατε στο σκέλος (α) είναι NP-πλήρης μέσω αναγωγής από κάποια γνωστή NP-πλήρη γλώσσα.

<u>Λύση</u>

(α) Διατυπώνουμε το πρόβλημα υπό μορφή γλώσσας ως εξής:

2_ΚΥΚΛΟΙ = { $\langle$V,d[|V|,|V|], start, K$\rangle$ | V σύνολο από τοποθεσίες, d[v,u] πίνακας που περιέχει την απόσταση ανάμεσα σε κάθε ζεύγος τοποθεσιών u,v $\in$ V, start$\in$V σημείο εκκίνησης και K ένας ακέραιος K, τέτοια ώστε υπάρχουν δύο κύκλοι που ξεκινούν από τη start, κάθε τοποθεσία v $\in$ V ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τους δύο κύκλους και κάθε κύκλος έχει μήκος το πολύ K }

Ακολουθεί αλγόριθμος V που αποτελεί επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

Ver := "Για είσοδο $\langle$V, d[|V|,|V|], start, K, C_1, $C_2\rangle$ | V σύνολο από τοποθεσίες, d[v,u] πίνακας που περιέχει την απόσταση ανάμεσα σε κάθε ζεύγος τοποθεσιών u,v $\in$ V, start$\in$V σημείο εκκίνησης και K ένας ακέραιος, και επιπρόσθετα C_1, C_2 ακολουθίες από κόμβους

1. Αν
   a. $C_1 \cup C_2 = V$, και
   b. C_1, C_2 αποτελούν μονοπάτια που ξεκινούν και τελειώνουν στην κορυφή start, και

c. Οι αποστάσεις που καλύπτει κάθε ένα από τα C_1, C_2 είναι μικρότερο ή ίσο με K,

τότε αποδέξου.

2. Διαφορετικά, απόρριψε."

Ο χρόνος εκτέλεσης του επαληθευτή Ver είναι πολυωνυμικός ως προς το n, όπου n το πλήθος των κορυφών του V. Επομένως ο Ver αποτελεί επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

(β) Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα είναι NP πλήρες αρκεί να δείξουμε ότι ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε αυτό. Η αναγωγή θα γίνει από το πρόβλημα ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν υπάρχει πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα 2-ΚΥΚΛΟΙ τότε υπάρχει πολυωνυμική λύση και για το πρόβλημα ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ.

Έστω G = (V,E) ο γράφος για τον οποίο θέλουμε να ελέγξουμε αν διαθέτει Χαμιλτονιανή διαδρομή. Δημιουργούμε την τετράδα ⟨V', d[|V'|,|V'|], start, K⟩ ως εξής όπου n = |V|:

- V' = V ∪ {loop, st}, όπου loop και st δύο καινούριες κορυφές
- $d[u,v] = \begin{cases} 2, & αν\ (u,v) \in E \text{ ή } u = st, v \in V, και\ αντίστροφα \\ n+1, & αν\ u = start, v = loop\ και\ αντίστροφα \\ 4n & otherwise \end{cases}$
- start η καινούρια κορυφή st, και
- K = 2n+2

Διαισθητικά, ο γράφος που δημιουργήσαμε περιέχει ένα κύκλο ανάμεσα στους καινούριους κόμβους st και loop μήκους 2n+2. Μέσω αυτού του κύκλου επιδιώκουμε να κρατήσουμε απασχολημένο τον ένα από τους δύο οδηγούς. Το τι απομένει στον γράφο μας είναι οι κόμβοι του αρχικού γράφου, όλοι συνδεδεμένοι με τον καινούριο κόμβο st. Έχουμε αναθέσει ως αποστάσεις ανάμεσα στους κόμβους του γράφου την τιμή 2 αν οι κόμβοι είναι ενωμένοι μέσω ακμής ή αν ένας από αυτούς είναι ο κόμβος st (ο οποίος παίζει τον ρόλο του σημείου εκκίνησης) διαφορετικά την τιμή 2n+2 η οποία είναι μια απαγορευτική τιμή για τους οδηγούς οι οποίοι θέλουν να ολοκληρώσουν τη διαδρομή τους με συνολικό κόστος το πολύ 2n+2.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αλγόριθμος για το πρόβλημα 2_ΚΥΚΛΟΙ.

Αλγόριθμος για ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ: Τρέχουμε τον αλγόριθμο για το πρόβλημα 2_ΚΥΚΛΟΙ στην πιο πάνω τετράδα. Αν ο αλγόριθμος αποδεχθεί τότε απαντούμε ότι ο αρχικός γράφος περιέχει Χαμιλτονιανή διαδρομή. Αν απορρίψει, τότε απαντούμε πως όχι.

Ορθότητα: Παρατηρούμε τα εξής:

Ο γράφος G περιέχει 2 κύκλους σύμφωνα με τις προδιαγραφές της άσκησης

αν και μόνο αν

Υπάρχει κύκλος που ξεκινά και τερματίζει από την κορυφή st και περνά από κάθε κορυφή ακριβώς μια φορά (το βάρος του κύκλου δεν μπορεί να ξεπερνά το 2n+2 επομένως δεν μπορεί να περιέχει περισσότερες από n+1 ακμές/n+2 κορυφές)

αν και μόνο αν

Υπάρχει μονοπάτι μήκους 2n-2 ανάμεσα στους κόμβους του αρχικού γράφου που περνά από κάθε κόμβο ακριβώς μια φορά αν και μόνο αν

ο αρχικός γράφος διαθέτει Χαμιλτονιανή διαδρομή

Συμπέρασμα: Αν το πρόβλημα 2_ΚΥΚΛΟΙ επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε και το πρόβλημα ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως το πρόβλημα ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ είναι NP-πλήρες.

Άσκηση 5

Ένας λογικός τύπος βρίσκεται σε διαζευκτική κανονική μορφή (ΔΚΜ) αν αποτελεί τη διάζευξη ενός συνόλου λεξιγραμμάτων που συνδέονται μεταξύ τους μέσω της πράξης της σύζευξης. Για παράδειγμα ο πιο κάτω λογικός τύπος βρίσκεται σε ΔΚΜ:

$$(\overline{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \vee (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}) \vee (\boldsymbol{a} \wedge \overline{\boldsymbol{b}} \wedge \overline{\boldsymbol{c}})$$

Το Πρόβλημα ΔΚΜ_ΑΛ ορίζεται ως εξής:

ΔΚΜ_ΑΛ = {⟨φ⟩ | ο φ είναι ένας αληθεύσιμος ΔΚΜ τύπος}

(α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ΔΚΜ_ΑΛ ανήκει στην κλάση P.

(β) Να εντοπίσετε το σφάλμα στην πιο κάτω "απόδειξη" η οποία δείχνει ότι P = NP.

Έστω ότι μας δίνεται ένας τύπος σε 3ΣΚΜ και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθεύσιμος. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα της επιμεριστικότητας ($a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$) για να λάβουμε ότι

$$\begin{aligned}(\overline{\boldsymbol{a}} \vee \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c}) \wedge \left(\boldsymbol{a} \vee \overline{\boldsymbol{b}} \vee \overline{\boldsymbol{c}}\right) = {} & (\overline{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\overline{\boldsymbol{a}} \wedge \overline{\boldsymbol{b}}) \vee (\overline{\boldsymbol{a}} \wedge \overline{\boldsymbol{c}}) \\ & \vee (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{b} \wedge \overline{\boldsymbol{b}}) \vee (\boldsymbol{b} \wedge \overline{\boldsymbol{c}}) \\ & \vee (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{c} \wedge \overline{\boldsymbol{b}}) \vee (\boldsymbol{c} \wedge \overline{\boldsymbol{c}})\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο από το μέρος (α) για να διαγνώσουμε, σε πολυωνυμικό χρόνο, κατά πόσο ο ΔΚΜ τύπος που έχει προκύψει είναι αληθεύσιμος. Αφού γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα 3-SAT είναι NP-πλήρες, συμπεραίνουμε ότι P = NP.

Λύση

(α) Το πρόβλημα ΔΚΜ_ΑΛ ανήκει στην κλάση P αν και μόνο αν υπάρχει αλγόριθμος που το επιλύνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Πιο κάτω παρουσιάζουμε ένα τέτοιο αλγόριθμο.

Με είσοδο ένα λογικό τύπο φ

1. Επιβεβαίωσε ότι ο φ βρίσκεται σε ΔΚΜ.
2. Αν όχι, τότε απόρριψε, διαφορετικά προχώρησε στο βήμα 3.
3. Έστω ότι ο φ = ($\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$) όπου $\phi_i = (l_1^i \wedge \ldots \wedge l_k^i)$. Αν υπάρχει κάποιο j τέτοιο ώστε ο όρος $\phi_j = \left(l_1^j \wedge \ldots \wedge l_k^j\right)$ να μην περιέχει οποιαδήποτε μεταβλητή και την άρνηση αυτής τότε απαντούμε θετικά, διαφορετικά απαντούμε αρνητικά.

Ο πιο πάνω αλγόριθμος βασίζεται στην παρατήρηση ότι για να είναι ένας ΔΚΜ τύπος αληθεύσιμος, θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος που δεν περιέχει την ίδια μεταβλητή και θετικά και αρνητικά. Για παράδειγμα, ο τύπος

$$(\bar{a} \wedge a \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$$

είναι αληθεύσιμος, π.χ. μπορούμε να θέσουμε *a* = True, *b* = *c* = False. Αντιθέτως ο τύπος

$$(\bar{a} \wedge b \wedge a) \vee (b \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$$

δεν είναι αληθεύσιμος: για να γίνει ο τύπος αληθής θα πρέπει τουλάχιστον ο ένας από τους δύο όρους $(\bar{a} \wedge b \wedge a)$ και $(b \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$ να πάρει την τιμή True. Αυτό όμως είναι αδύνατο.

Χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου: Τόσο το βήμα 1 όσο και το βήμα 3 μπορούν να υλοποιηθούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως, το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.

(β) Το πρόβλημα στην απόδειξη εμφανίζεται στο σημείο όπου προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος από το μέρος (α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει το καινούριο πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να ήταν αυτό ορθό θα έπρεπε το πρόβλημα 3-SAT να μπορούσε να αναχθεί στο πρόβλημα του ΔΚΜ_ΑΚ σε πολυωνυμικό χρόνο. Εντούτοις, η μετατροπή που περιγράφεται στην «απόδειξη» δεν παίρνει πολυωνυμικό χρόνο αφού θα δημιουργήσει 3^n συζεύξεις όπου *n* είναι το πλήθος των φράσεων που συνδέονται με σύζευξη στην αρχική πρόταση.