

Φροντιστήριο 10 – Λύσεις

Άσκηση 1

Υποθέστε ότι η γλώσσα A μπορεί να αναχθεί στη γλώσσα B . Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες όχι;

(α) Κάποιος διαγνώστης για τη γλώσσα A μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διάγνωση της γλώσσας B .

(β) Αν η A είναι διαγνώσιμη τότε και η B είναι διαγνώσιμη.

(γ) Αν η A είναι μη διαγνώσιμη τότε και η B είναι μη διαγνώσιμη.

Λύση

(α) Λάθος. Αν η γλώσσα A μπορεί να αναχθεί στη γλώσσα B τότε, εξ' ορισμού, ένας διαγνώστης για τη γλώσσα B μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάγνωση της γλώσσας A . Το αντίθετό όμως δεν ισχύει απαραίτητα.

(β) Λάθος. Αν η γλώσσα A μπορεί να αναχθεί στη γλώσσα B τότε αν η B είναι διαγνώσιμη και η A είναι διαγνώσιμη. Το αντίθετο όμως δεν ισχύει απαραίτητα.

(γ) Ορθό. Έστω A μια μη διαγνώσιμη γλώσσα. Ας υποθέσουμε, για να φθάσουμε σε αντίφαση, ότι η γλώσσα B είναι διαγνώσιμη. Τότε υπάρχει διαγνώστης για τη γλώσσα B . Επιπλέον, αφού η A μπορεί να αναχθεί στη B , ο διαγνώστης της γλώσσας B μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διάγνωση της γλώσσας A . Συνεπώς η γλώσσα A είναι διαγνώσιμη. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση. Επομένως, αν η A είναι μη διαγνώσιμη τότε και η B είναι μη διαγνώσιμη.

Άσκηση 2

Θεωρήστε το πρόβλημα της διάγνωσης κατά πόσο μια TM M αποδέχεται τη λέξη 0010 .

(α) Να μορφοποιήσετε το πρόβλημα ως μια γλώσσα με το όνομα L_{0010} .

(β) Να αποδείξετε ότι η γλώσσα είναι μη διαγνώσιμη με αναγωγή από τη γλώσσα A_{TM} .

Λύση

(α) $L_{0010} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ αποδέχεται τη λέξη } 0010 \}$

(β) Για να επιδείξουμε τη μη διαγνωσιμότητα της γλώσσας, θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM} , στην υπό μελέτη γλώσσα L_{0010} .

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα L_{0010} είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM} . Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η L_{0010} είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

$S = \text{“Με είσοδο } \langle M, w \rangle$

1. Φτιάξε τη TM M' η οποία με είσοδο x :

(α) Αν $x = 0010$ η S τρέχει το M με είσοδο w . Αν η M αποδεχτεί το w τότε και η M' αποδέχεται το x και τερματίζει.

(β) Αν $x \neq 0010$ η M' απορρίπτει.

2. Τρέξε την R με είσοδο $\langle M' \rangle$.
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι η μηχανή M' αποδέχεται τη λέξη 0010 αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w . Ως εκ τούτου, με είσοδο τη μηχανή M' ο διαγνώστης R θα αποδεχτεί αν και μόνο αν η μηχανή M' αποδέχεται τη λέξη 0010 ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w .

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα δεν είναι διαγνώσιμη.

$KENH = \{ \langle M \rangle \mid \eta \ M \ \epsilon\text{ίναι μια μηχανή Turing η οποία για κάθε είσοδο τερματίζει και, κατά τον τερματισμό της, έχει κενή ταινία} \}$

Λύση

Για να λύσουμε την άσκηση αυτή θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM} στην υπό μελέτη γλώσσα $KENH$.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα $KENH$ είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM} . Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η $KENH$ είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

$S = \text{"Με είσοδο } \langle M, w \rangle$

1. Φτιάξε τη TM M' η οποία με είσοδο x :
Τρέξε την M με είσοδο w . Αν η M αποδεχτεί το w τότε άδειασε την ταινία και αποδέξου. Αν η M απορρίψει, γράψε κάτι στην ταινία και απόρριψε.
2. Τρέξε την R με είσοδο $\langle M' \rangle$.
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι η μηχανή M' τερματίζει σε κάθε είσοδο και κατά τον τερματισμό της έχει κενή ταινία αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w . Ως εκ τούτου, με είσοδο τη μηχανή M' ο διαγνώστης R θα αποδεχτεί αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w .

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.